§3. Дифференцирование неявной функции

Функция $z = f(x;y)$ называется неявной, если она задается уравнением

$$F(x;\, y;\, z) = 0, \qquad (44.11)$$

неразрешенным относительно z. Найдем честные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z, заданной уравнением (44.11). Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $f(x;\, у)$, получим тождество $F(z;\, y;\, f(x;y)) = 0$. Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x;\, y;\, f(x;\, y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ (} y \text{ — считаем постоянным),}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x;\, y;\, f(x;\, y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ (} x \text{ — считаем постоянным),}$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \qquad \left(F'_z \neq 0\right) \qquad (44.12)$$

Замечания.

а) Уравнение вида (44.11) не всегда определяет одну переменную как неявную функцию двух других. Так, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 — 4 = 0$ определяет функции $z_1 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ и $z_2 = — \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, определенные в круге $x^2 + y^2 \le 4$, $z_3 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, определенную в полукруге $x^2 + y^2 \le 4$ при $y \ge 0$ и т. д., а уравнение $\cos(x + 2y + 3z) - 4 = 0$ не определяет никакой функции.

Имеет место теорема существования неявной функции двух переменных: если функция $F(x;\, y;\, z)$ и ее производные $F'_x\ (x;\, y;\, z)$, $F'_y(x;\, y;\, z)$, $F'_z(x;\, y;\, z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0\,(x_0;\, y_0;\, z_0)$, причем $F\,(x_0;\, y_0;\, z_0) = 0$, а $F'_x(x_0;\, y_0;\, z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение (44.11) определяет единственную функцию $z = f\,(x;\, y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки $(x_0;\, y_0)$ и такую, что $f\,(x_0;\, y_0) = z_0$.

б) Неявная функция $y = f(x)$ одной переменной задается уравнением $F(x;\, y) = 0$. Можно показать, что в случае, если удовлетворены условия существования неявной функции одной переменной (имеется теорема, аналогичная вышеуказанной), то производная неявной функции находится по формуле:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \left(F'_y \neq 0\right).$$

Пример 44.6. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $e^z + z — x^2y + 1 = 0$.

Решение: Здесь $F\,(x;\, y;\, z) = e^z + z - x^2y + 1$, $F'_x = -\,2xy$, $F'_y = -\,x^2$, $F'_z = e^z + 1$. По формулам (44.12) имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = +\frac{2xy}{e^z + 1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}$

Пример 44.7. Найти $\frac{dy}{dx}$, если неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением $y^3 + 2y = 2x$.

Решение: Здесь $F(x; y) = y^3 + 2y - 2x$, $F'_x = -2$, $F'_y = 3y^2 + 2$. Следовательно,

$y'_x = -\frac{-2}{3y^2+2}$, т.е. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3y^2+2}$

§ 4 КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$ некоторой области $D \in R^2$. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z, плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (см. рис. 2).

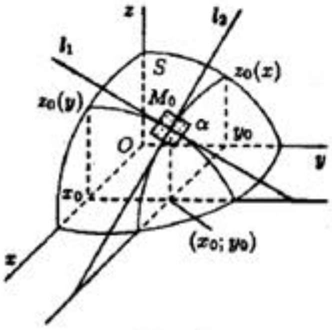

Рис. 2

Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции $z = f(x; y)$ вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0\ ;\ y_0\ \ f\ \ (x_0;Y_0))$ принадлежит кривой z_0 (y). В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена касательная l_1.

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость а, которая называется касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0.

Составим ее уравнение. Так как плоскость α, проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ то ее уравнение может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое можно переписать так:

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \qquad (45.1)$$

(разделив уравнение на - C и обозначив $\frac{A}{-C} = A_1, \frac{B}{-C} = B_1$).

Найдем A_1 и B_1.

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид

$$z - z_0 = f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0), x = x_0;$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0), y = y_0$$

соответственно.

Касательная l_1 лежит в плоскости α, следовательно, координаты всех точек l_1 удовлетворяют уравнению (45.1). Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0), x = x_0; \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно B_1, получим, что $B_1 = f'_y(x_0; y_0)$.

Проводя аналогичные рассуждения для касательной l_2, легко установить, что $A_1 = f'_x(x_0;y_0)$.

Подставив значения A_1 и B_1 в уравнение (45.1), получаем искомое уравнение касательной плоскости:

$$z - z_0 = f'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0). \qquad (45.2)$$

Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее нормалью.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости (см. с. 87), легко получить канонические уравнения нормали:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}} \qquad (45.3)$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x; y; z) = 0$, то уравнения (45.2) и (45.3), с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции:

$$f'_x(x_0;y_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}, \quad f'_y(x_0;y_0) = -\frac{F'_y(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}$$

(см. формулы (44.12)), примут соответственно вид

$$F'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(x_0;y_0)\cdot(z-z_0) = 0$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0)}.$$

Замечание. Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, т. е. не особых, точек поверхности. Точка M_0 поверхности называется особой, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

Пример 45.1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1; -1;2)$.

Решение: Здесь $z'_x = f'_x(x;y) = 2x$, $f'_y(x;y) = 2y$, $f'_x(1;-1) = 2$, $f'_y(1;-1) = -2$.

Пользуясь формулами (45.2) и (45.3) получаем уравнение касательной плоскости: $z - 2 = 2\cdot(x-1) - 2\cdot(y+1)$ или $2x - 2y - z - 2 = 0$ и уравнение нормали: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.